Komplexe Quadratwurzeln

$\sqrt{a}$

bzw. **Lösen von Gleichungen der Form** $z^2 = a$.

Sammlung von 31 Beispielen

Datei Nr. 50014

Stand 13. September 2023

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Besonderheit der Wurzeln aus komplexen Zahlen

In der Menge $\mathbb{R}$ der <u>reellen Zahlen</u> gibt es zu jeder positiven Zahl a zwei Zahlen, deren Quadrat a ergeben: $x_1 = \sqrt{a}$ und $x_2 = -\sqrt{a}$. Dies kann man so beweisen:

$$x_1^2 = \sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = \sqrt{a\cdot a} = \sqrt{a^2} = a \quad \text{und} \quad x_2^2 = \left(-\sqrt{a}\right)\cdot\left(-\sqrt{a}\right) = +\sqrt{a\cdot a} = \sqrt{a^2} = a$$

Als „Wurzel aus a“ bezeichnet man jedoch *<u>nur die positive</u>* Zahl und schreibt dafür $\sqrt{a}$.

In der Menge $\mathbb{C}$ der <u>komplexen Zahlen</u> gibt es bei diesem Vorgehen jedoch Probleme.

Setzt man $z_1 = \sqrt{-1} = +i$, dann folgt $z_1^2 = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i\cdot i = i^2 = -1$

Setzt man $z_2 = -\sqrt{-1} = -i$, dann folgt ebenfalls $z_2^2 = \left(-\sqrt{-1}\right)\cdot\left(-\sqrt{-1}\right) = (-i)\cdot(-i) = i^2 = -1$

Beide Möglichkeiten bestehen also die Probe.

Jetzt kommt aber das Problem:

Nach dem Rechengesetz für Wurzeln sollte einerseits gelten:

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Andererseits ist aber auch $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$

Also wäre 1 = -1. Das muss abschrecken!

Konsequenz:

Für komplexe Zahlen gilt die Formel $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$ **nicht**

Vor allem kann man nicht mehr sagen: „Die positive Zahl“ wird zur Wurzel erklärt.
Man kann nämlich komplexe Zahlen nicht mehr größenmäßig vergleichen, denn man kann sie ja nicht entlang eines Zahlenstrahls „der Größe nach“ anordnen, denn man benötigt für ihre Darstellung eine Ebene, die Gaußsche Zahlenebene. **Es gibt keine positiven oder negativen komplexe Zahlen!**

Merke: Für Quadratwurzeln aus reellen Zahlen a gilt folgendes:

Jede positive reelle Zahl a > 0 hat in $\mathbb{C}$ die <u>beiden</u> Quadratwurzeln $\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$.

Jede negative reelle Zahl a < 0 hat in $\mathbb{C}$ die <u>beiden</u> Quadratwurzeln $\sqrt{|a|}\cdot i$ und $-\sqrt{|a|}\cdot i$.

Wie man Quadratwurzeln und n-te Wurzeln aus nicht reellen Zahlen berechnet, folgt im Laufe dieses Abschnittes. Es wird zu jeder komplexen Zahl <u>mehrere Wurzeln</u> geben, also keine eindeutige Wurzel mehr. Allerdings hat man sich darauf geeinigt, quasi eine „Hauptwurzel“ bzw. einen „Hauptwert“ zu definieren, die auch von Taschenrechnern angezeigt wird. Es ist diejenige Wurzel mit dem kleinsten Argument.

Muster-Berechnung von komplexen Quadratwurzeln $\sqrt{a}$

Es gibt zwei verschiedene Methoden zur Lösung der Gleichung $z^2 = a$

Die erste wirkt sehr einfach, weil im Grunde auf Mittelstufen-Mathematik zurückgreift.
Sie verwendet die **Methode des Koeffizientenvergleichs.**

Die zweite Methode verwendet die **Polardarstellung der komplexen Zahlen** und setzt tiefere Kenntnisse voraus. Diese Methode benötigt man vor allem für höhere Potenzen Daher wird sie hier auch schon einige Male gezeigt, weil sie hier einfacher ist, als bei höheren Potenzen.

Methode mit einem Koeffizientenvergleich

Beispiel: $z^2 = -5 + 12i$

Es sei $z = x + y \cdot i$, dann folgt $\quad z^2 = (x + y \cdot i)^2 = x^2 + 2xy \cdot i + y^2 i^2$

Also: $\quad z^2 = \left(x^2 - y^2\right) + (2xy) \cdot i = \boxed{-5 + 12i}$

Vergleichen: $\quad \begin{Bmatrix} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Aus (2) folgt $\quad y = \dfrac{6}{x} \qquad (3)$

Achtung: Aus (3) erkennt man, dass x und y gleiche Vorzeichen haben!

In (1): $\quad x^2 - \dfrac{36}{x^2} = -5 \qquad | \ \cdot x^2$

$x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \qquad$ Biquadratische Gleichung.

Lösungsformel für a^2: $\quad x^2 = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \dfrac{-5 \pm 13}{2} = \begin{cases} 4 \\ \cancel{-9 < 0} \end{cases} \quad (x^2 \geq 0)\ !$

Aus $x^2 = 4$ folgt $x = \pm 2$.

In (3): $\quad \begin{cases} \text{Zu } x = 2 \text{ folgt } y = 3 \\ \text{Zu } x = -2 \text{ folgt } y = -3 \end{cases}$

1. Lösung: $\quad z_1 = 2 + 3i$

2. Lösung: $\quad z_2 = -2 - 3i$

Lösungsmenge: $\quad \mathbb{L} = \{2 + 3i\,;\, -2 - 3i\}$

Hinweis: Bei dieser Methode stellen die Indizes 1 und 2 die Nummerierung dar.
Bei der nun folgenden 2. Methode ist das anders: Dort muss man z_0 und z_1 verwenden,
weil die Indizes zu einer Formel gehören und dafür 0 und 1 statt 1 und 2 verwendet werden müssen.

Methode mit der Polardarstellung.

Beispiel: $z^2 = -5 + 12i$

Zuerst benötigt man für den Radikanden $a = -5 + 12i$ die Polardarstellung:

Betrag von a: $|a| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = 13$

Weil in diesem Fall a im 2. Feld liegt, gilt für den Argumentwinkel

$$\alpha = 180^\circ - \arctan\left|\frac{12}{-5}\right| = 180^\circ - 67{,}4^\circ = 112{,}6^\circ$$

Ziel: Polarform von a: $a = 13 \cdot E\left(112{,}6^\circ + k \cdot 360^\circ\right)$

Lösungsansatz in Polarform: $z = r \cdot E(\varphi)$

Quadrieren: $a = z^2 = r^2 \cdot E(2\varphi)$

Jetzt vergleicht man a mit z^2:

$$r^2 = 13 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{13} \quad (r \geq 0!)$$

$$2\varphi = 112{,}6^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\varphi = 56{,}3^\circ + k \cdot 180^\circ$$

Lösungsformel allgemein: $z_k = \sqrt{r} \cdot E\left(\frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{2}\right) = \sqrt{r} \cdot \left(\frac{\alpha}{2} + k \cdot 180^\circ\right)$ für k = 0, 1.

Speziell hier: $z_k = \sqrt{13} \cdot \left(56{,}3^\circ + k \cdot 180^\circ\right)$, $k \in \{0{,}1\}$

Ausführlich:

Für k = 0 $z_0 = \sqrt{13} \cdot \left(\cos 56{,}3^\circ + i \cdot \sin 56{,}3^\circ\right) = 2 + 3i$

: Für k = 1: $z_1 = -\sqrt{13} \cdot \left(\cos 236{,}3^\circ + i \cdot \sin 236{,}3^\circ\right) = -2 - 3i$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{2 + 3i\,; -2 - 3i\}$

Das Arbeiten mit der gerundeten Winkelzahl ergibt nicht diese „schönen“ Ergebnisse sondern

$z_0 \approx 2{,}00052 + 2{,}99965 \cdot i$ usw.

Um hier genaue Werte zu bekommen, muss man mit trigonometrischen Formeln arbeiten.

Allgemeine Darstellung dieser Methode:

: Zunächst stellt man a in Polarform dar: $a = |a| \cdot E\left(\alpha + k \cdot 360^\circ\right)$

Der Lösungsansatz $z = r \cdot E(\varphi)$ führt zu $z^2 = r^2 \cdot E(2\varphi)$

Vergleicht man beides, erhält man $r^2 = |a| \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{|a|}$

und $2\varphi = \alpha + k \cdot 360^\circ$

also $\varphi = \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{2} = \frac{\alpha}{2} + k \cdot 180^\circ$

Damit lautet die Lösungsformel: $z_k = \sqrt{|a|} \cdot E\left(\frac{\alpha}{2} + k \cdot 180^\circ\right)$ für $k \in \{0\,;1\}$.

Ausführlich: $z_k = \sqrt{|a|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2} + k \cdot 180^\circ\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} + k \cdot 180^\circ\right)\right)$

Und es wird $z_1 = -z_0$.. (Achtung: Nicht $z_{1,2}$ verwenden!)

Hinweis zur Wurzelschreibweise:

Im Falle reeller Zahlen schreibt man beispielsweise: Zu $x^2 = 5$ gehört $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$.

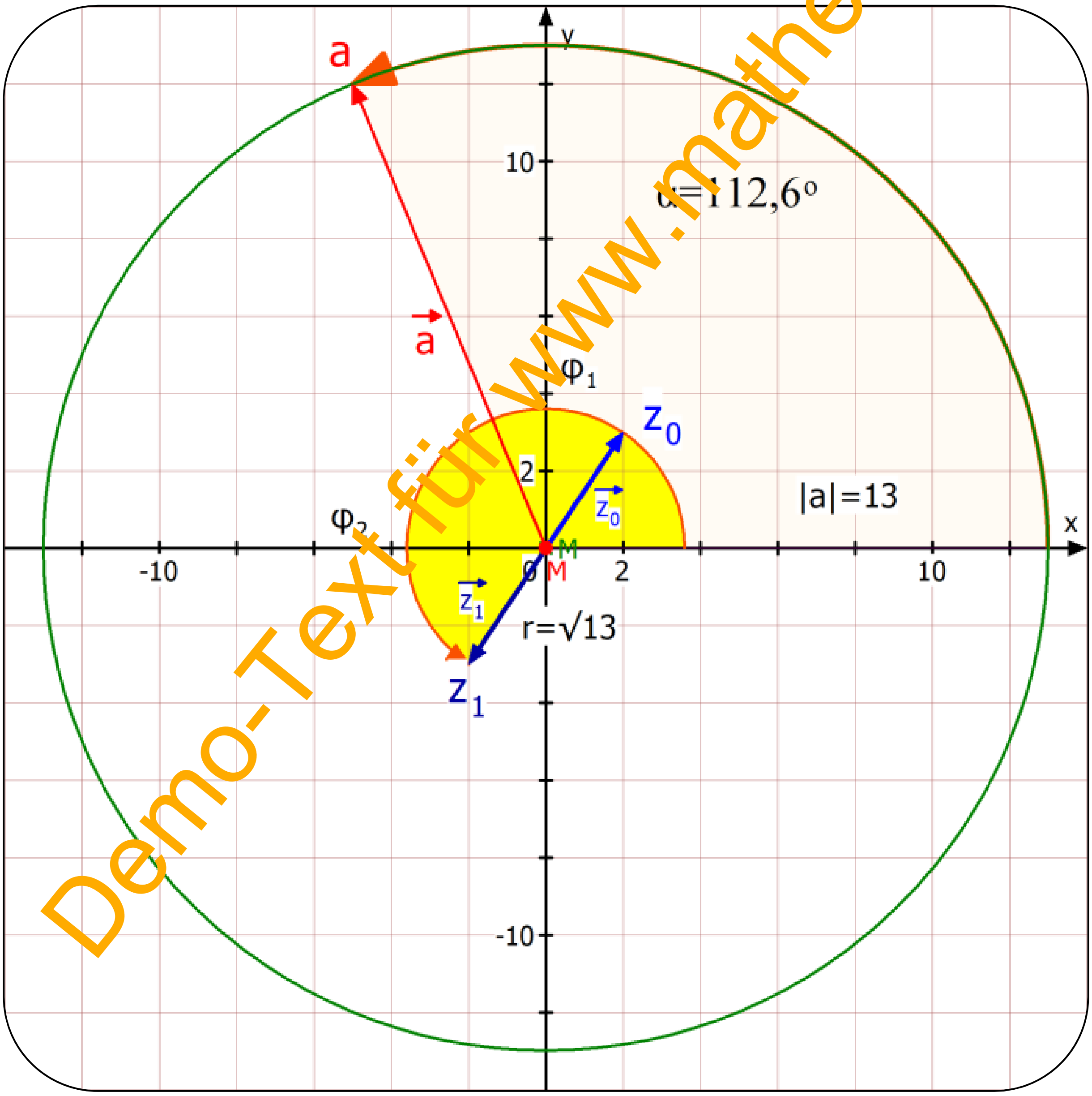
Das geht im Falle komplexer Zahlen nicht, weil da $\sqrt{5}$ nicht (eindeutig) definiert ist.

Beispiel der Ergebnisdarstellung:

Gegeben war die Gleichung $z^2 = -5 + 12i$

Die komplexe Zahl $a = -5 + 12i$ hat zwei Quadratwurzeln: $z_{0,1} = \pm(2 + 3i)$.

Die Zeichnung zeigt für Interessierte alle Daten zu diesen Zahlen in geometrischer Interpretation:



Liste der folgenden Lösungsbeispiele

Berechne die folgenden Wurzeln bzw. die Lösungen der quadratischen Gleichungen

1.	$\sqrt{i}$	2.	$\sqrt{-i}$	3.	$\sqrt{4i}$
4.	$\sqrt{-2i}$	5.	$z^2 = 2i$	6.	$z^2 = 1 - i$
7.	$\sqrt{-4+3i}$	8.	$z^2 = 3+4i$	9.	$z^2 = 3-4i$
10.	$\sqrt{6-8i}$	11	$\sqrt{5+5i}$	12.	$\sqrt{-5-5i}$
13.	$\sqrt{-5+5i}$	14.	$\sqrt{-12+5i}$	15.	$z^2 = 15+20i$
16.	$z^2 = 21-20i$	17.	$z^2 = -21+20i$	18.	$z^2 = \frac{1}{2} - 3i$
19.	$z^2 = 2 + i \cdot 2\sqrt{3}$	20.	$z^2 = -2 + i \cdot 2\sqrt{3}$	21.	$\sqrt{2\sqrt{3} - 2i}$
22.	$\sqrt{-1 - i\sqrt{3}}$	23	$z^2 = 1 + i \cdot \sqrt{3}$	24.	$z^2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$
25.	$\sqrt{\frac{2}{1-i}}$	26.	$\frac{1}{\sqrt{2i}}$	27.	$\sqrt{\frac{1+i}{1-i}}$
28.	$z^2 = i + \frac{2}{i}$	29.	$z^2 = \frac{8+i}{-1+3i}$	30.	$z^2 = \sqrt{-5-5i}$

Hinweis: Es handelt sich bei $z^2 = x + iy$ oder $\sqrt{x + i \cdot y}$ um dieselbe Aufgabe.

Die Lösungen folgen weiter hinten.

1. Berechnung der Quadratwurzeln $\sqrt{i}$

Nur im Original ….